

24. Kombinatorika, a valószínűségszámítás elemei

1. Kombinatorika

A véges halmazokkal foglalkozó tudományterület.

Idő hiányában csak a nevezetes összeszámolásokkal foglalkozunk.

a) Sorbaállítások (permutációk)

alapfeladat: n különböző dolgot (valamely halmaz elemeit) hányféleképpen rakhatunk sorba?

TÉTEL: $n!$ ismétlés nélküli permutáció: P_n

bizonyítás: teljes indukcióval

$n=1$ -re $1=1!$

$n=2$ -re $2=2 \cdot 1=2!$ két különböző elemet kétféleképpen rakhatunk sorba, például a, b és b, a

Tegyük fel, hogy $n=k$ -ra igaz az állítás, azaz k különböző elem permutációinak száma $k!$, ahol $k > 2$ egész.

Bizonyítsuk be, hogy $n=k+1$ -re is igaz!

Válasszuk ki k elem egy permutációját. A $(k+1)$ -edik elemet $k+1$ helyre helyezhetjük el, így $k+1$ db permutációt kapunk. Mivel k elemnek $k!$ permutációja volt és mindegyikből $k+1$ db lett, ezért $(k+1)k!$ permutációt kapunk.

$(k+1)k! = (k+1)!$ → az állítás igaz

változat: n dolog, melyek k -félék, és az egyes osztályokba tartozók nem megkülönböztethetők:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \quad (1 \leq k \leq n)$$

hányféleképpen rakhatók sorba?

TÉTEL: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$, ismétléses permutáció: $P_n^{n_1; n_2; \dots; n_k}$

bizonyítás: visszavezetés az alapfeladatra

speciális eset: $k > 2$, $n = i + n - i$, $\frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}$

DEF: n különböző elem egy sorrendjét az n elem egy permutációjának nevezzük, ahol $n \in \mathbb{N}^+$

b) Variációk:

DEF: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy mindet elemet legfeljebb egyszer választunk ki és számít a kiválasztott elemek sorrendje, akkor n elem egy k -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk. ($n, k \in \mathbb{N}^+$ és $k \leq n$)

alapfeladat: n különböző dologból kiválasztva k dolgot, hányféleképpen rakhatók sorba?

TÉTEL: $\frac{n!}{(n-k)!}$ ismétlés nélküli variáció: V_n^k

bizonyítás:

Az 1. elemet n -féleképpen választhatjuk ki,

a 2. elemet $(n-1)$ -féleképpen választhatjuk ki,

a 3. elemet $(n-2)$ -féleképpen választhatjuk ki,

...

a k . elemet $n-(k-1)$ -féleképpen választhatjuk ki

$$V_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

bővítve $(n-k)!$ -sal:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

változat: a különböző dologból visszatevéssel kiválasztunk k db-ot, ez hányféleképpen lehetséges?

TÉTEL: n^k ismétléses variáció: V_n^{ki}

c) Kombinációk

DEF: Ha n különböző elemből kiválasztunk k elemet úgy, hogy minden elemet legfeljebb egyszer választunk ki, és nem számít a kiválasztott elemek sorrendje, akkor n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk. ($n, k \in \mathbb{N}^+$ és $k \leq n$)

alapfeladat: n elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma (k db elem kiválasztása, ha a sorrend nem számít)

TÉTEL: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ismétlés nélküli kombináció: $C_n^k = \binom{n}{k}$

bizonyítás:

$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ figyelembe veszi a sorrendet

$$\frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

TÉTEL: binomiális tétel, ismétléses kombináció: $C_n^{ki} = \binom{n+k-1}{k}$

(ismétléses kombináció: többször is választhatjuk azt az elemet, amelyet már kihúztunk)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

A binomiális tétel bizonyítása: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b) \cdot \dots \cdot (a+b)}_{n \text{ db tényező}}$

A szorzást a következőképpen végezzük:

- a^n -es tagot úgy kapunk, ha n db tényezőtől választunk a -t és 0 db tényezőtől b -t.

Ez $\binom{n}{0}$ -féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{0} \cdot a^n$ lesz.

- $a^{n-1} \cdot b$ -s tagot úgy kapunk, ha $n-1$ db tényezőtől választunk a -t és 1 db tényezőtől b -t.

Ez $\binom{n}{1}$ -féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b$ -s lesz

- $a^{n-2} \cdot b^2$ -es tagot úgy kapunk, ha $n-2$ db tényezőtől választunk a -t és 2 db tényezőtől b -t.

Ez $\binom{n}{2}$ -féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2$ lesz.

- $a \cdot b^{n-1}$ -es tagot úgy kapunk, ha 1 db tényezőtől választunk a -t és $n-1$ db tényezőtől b -t.

Ez $\binom{n}{n-1}$ -féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1}$ lesz.

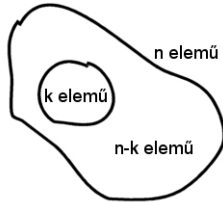
- b^n -es tagot úgy kapunk, ha 0 db tényezőtől választunk a -t és n db tényezőtől b -t.

Ez $\binom{n}{n}$ -féleképpen lehet. Tehát $\binom{n}{n} \cdot b^n$ lesz.

Ezeket összeadva → állítás.

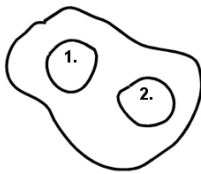
Fontos összefüggések:

$$1. \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



$$2. \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

bizonyítás:



$$1. \binom{n-1}{k} \text{-féle}$$

$$2. \binom{n-1}{k-1} \text{-féle}$$

Pascal-háromszög:

		1			0. sor
		1	1		1. sor
	1	2	1		2. sor
	1	3	3	1	3. sor
1	4	6	4	1	4. sor
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{n}$	

TÉTEL: $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

2^n : az összes részhalmazok száma

bizonyítás: lásd a halmazoknál

2. Valószínűségszámítás elemei

klasszikus képlet (Laplace):

$$p = \frac{\text{kedvező kimenetek (esetek)}}{\text{összes kimenetek (esetek)}}$$

alapfogalmak: véges sok lehetséges kimenetel esetén
 elemi események: az összes lehetséges kimenetek
 például:

2 érme esetén a valóságot az a modell írja le helyesen, ahol 4 elemi esemény van
 f-f, í-í, f-í, í-f (megkülönböztetjük az érméket)

A valószínűségszámítás szemléletes fogalma:

n: hányszor végezzük el a kísérletet

k: gyakoriság: egy adott kimenetel hányszor következik be

$\frac{k}{n}$: relatív gyakoriság: ha n kísérlet esetén valamely kísérlet k-szor következik be

Ha $\frac{k}{n}$ n növelésével egy adott szám körül ingadozik úgy, hogy az ingadozás stabilitás
 mutat, akkor ez a szám az adott esemény valószínűsége. (esemény: valahány elemi
 esemény adja meg)

eseménytér: az összes elemi események halmaza



A valószínűség matematikai fogalma:

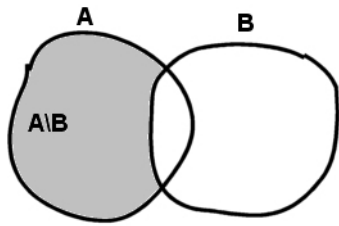
P egy függvény, ami az eseménytéren értelmezett és kielégíti a következő axiómákat:
 (Kolmogorov-axiómák)

1. $1 \geq p \geq 0$
2. $p(\text{biztos esemény}) = 1$
3. A és B egymást kizárók : $A \cap B = 0$
 $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Fontos eredmények:

- a) $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
 $p(\bar{A})$: komplementer esemény, $p(\text{lehetetlen esemény}) = 0$
- b) $A \subset B$ esetén $p(A) \leq p(B)$

c)



$$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$$

Ha véges sok lehetséges kimenetel mindegyike egyenértékű, akkor lesz a klasszikus képlet használható

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$$

$$p(A) = p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = \sum_{i=1}^k p(A_i) = k \cdot p(A_i) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} =$$

$$= \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

teljes eseményrendszer: egymást páronként kizáró események, melyek valószínűségének összege: 1

$$\sum_{i=1}^k p(A_i) = 1$$

eloszlás: $\left\{ \begin{array}{l} A_1, A_2, \dots, A_n \\ p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n) \end{array} \right\}$ (binomiális eloszlás, geometriai eloszlás)

(valószínűségi változó)

Alkalmazások:

- lottó, totó, szerencsejáték
- geometriai valószínűségek: π becslése (Buffon-féle tűprobléma)
- mintavétel, közvélemény-kutatás, minőség-ellenőrzés
- a nyeremény igazságos szétosztása félbeszakadt játék esetén
- kinetikus gázelmélet (fizika)
- domináns-recesszív öröklélmélet (biológia)