10.
A hasonlóság és alkalmazásai háromszögekre vonatkozó tételek bizonyításával

Hasonlóság: olyan geometriai transzformáció, amely egy középpontos hasonlósági transzformáció és egy egybevágósági transzformáció szorzata.

Geometriai transzformáció: olyan függvény, melynek értelmezési tartománya és értékkészlete is ponthalmaz.

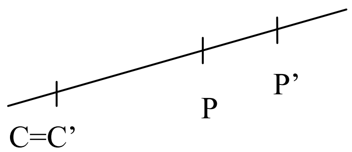
Síkbeli hasonlóság: síkbeli középpontos hasonlóság és síkbeli egybevágóság szorzata.

Síkbeli egybevágósági transzformáció: bármely P,Q pontpárra d(P,Q) = d(P’,Q’).

TÉTEL: Minden síkbeli egybevágóság legfeljebb 3 tengelyes tükrözés szorzataként előáll.

- tengelyes tükrözés, pont körüli forgatás, eltolás, csúsztatva tükrözés, identikus transzformáció.

Középpontos hasonlóság: olyan síkbeli (térbeli is lehet) transzformáció, ahol adott egy C=C’ rögzített pont és egy $\lambda>0$ valós szám és egy $P(\neq C)$ pont képére:



$$\frac{CP'}{CP} = \lambda$$

C: középpont

λ: a hasonlóság aránya

tulajdonságok:

- egyenes képe egyenes, amely párhuzamos az eredetivel
- szakasz képe olyan szakasz, amely párhozamos az eredetivel és hossza annak λ-szorosa
- $\lambda=1$: identikus transzformáció

(Szokás $\lambda<0$ arányra is értelmezni ekkor P és P′ a C ellentétes oldalán van.)

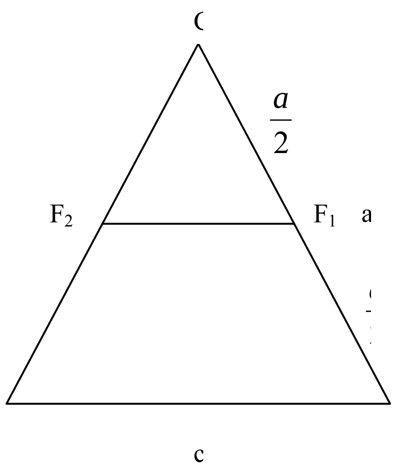
Definíció: Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

Hasonlósági alapesetek háromszögeknél:

- szögeik ugyanazok
- két-két megfelelő oldal aránya egyenlő és az általuk bezárt szög is egyenlő
- a megfelelő oldalak aránya ugyanannyi

Alkalmazása a háromszög-geometriában:

TÉTELEK:



- **Középvonal-tétel:**

Biz: $F_1CF_2\ \Delta \sim BCA\ \Delta$

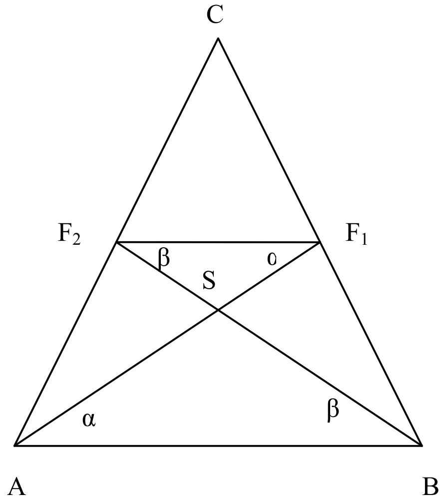
(2 oldal és az általuk bezárt szög)

$$\frac{BC}{F_1C} = 2 = \frac{AC}{F_2C}$$ (C-re nézve középpontosan hasonló $\lambda=2$)

$$\Downarrow$$

$$\frac{AB}{2}=F_1F_2$$

- **Súlyvonalra vonatkozó tétel:**



A középvonal-tétel miatt: $F_1F_2 \parallel AB$, így

$F_1F_2S\Delta \sim ABS\Delta$ és $\lambda=2$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AS}{SF_1}=\frac{BS}{SF_2}=2$$

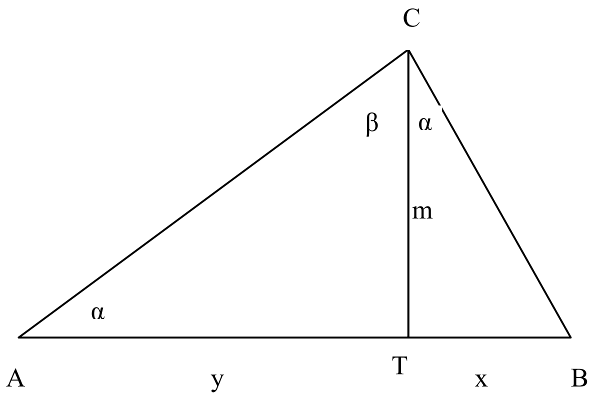
(2:1 arányú osztás)

Bármely 2 súlyvonalra elmondható

$$\Downarrow$$

Mindhárom illeszkedik S-re

- **Derékszögű háromszögekre vonatkozó mértani közép tételek:**
  - Magasságtétel
  - Befogótétel



$ABC\Delta \sim ATC\Delta \sim BTC\Delta$ (a szögek azonosak)

A megfelelő oldalak aránya:

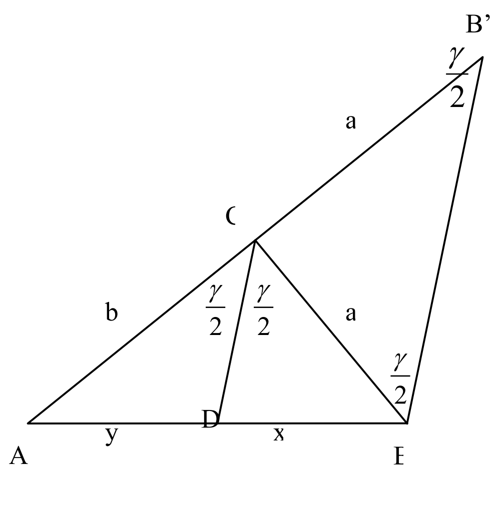
$$\frac{m}{x}=\frac{y}{m} \Longleftrightarrow m^2=xy \qquad m=\sqrt{xy}$$

$$\frac{b}{y}=\frac{c}{b} \Longleftrightarrow b^2=cy \qquad b=\sqrt{cy}$$

$$a=\sqrt{cx}$$

(megjegyzés: $\underline{a^2+b^2}=cx+cy=c(x+y)=\underline{c^2}$ $x+y=c$ Pitagorasz-tétel)

- A belső szögfelezőre vonatkozó tétel:



$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$$

$ADC\Delta \sim ABB'\Delta$ (a szögek egyenlők)

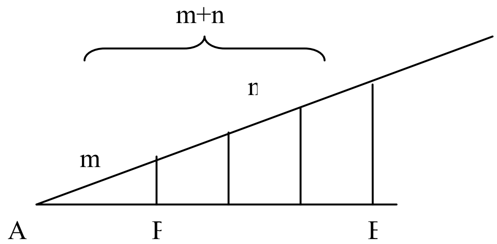
$$\frac{x+y}{y}=\frac{a+b}{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{y}+1=\frac{a}{b}+1$$

Alkalmazások:

- szakasz m:n arányú felosztása



PSZT: $\frac{m}{n} = \frac{AP}{PB}$ (hasonló háromszögek)

- filmvetítés (középpontos hasonlóság)
- perspektív ábrázolás
- Pitagorasz-tétel bizonyítása befogó-tétellel