

4. Gyökvonás, gyökfüggvények

Négyzetgyök:

Egy a nemnegatív valós szám négyzetgyöke az a nemnegatív szám, amelynek a négyzete a .

N-edik gyök:

$$n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$$

Egy a nemnegatív valós szám $2k$ -adik gyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek $2k$ -adik atványa a .

$$n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$$

Egy a valós szám $2k + 1$ -edik gyöke az a valós szám, amelynek a $2k + 1$ -edik hatványa a .

Definícióból következik:

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{ha } n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+ \\ a, & \text{ha } n = 2k + 1 \end{cases}$$

TÉTELEK:

- négyzetgyök azonosságai:

- szorzat négyzetgyöke = a tényezők szorzatának négyzetgyökével

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

Biz:

a $\sqrt{a}\sqrt{b}$ nem negatív

Azt kell bizonyítani hogy a négyzete egyenlő ab -vel.

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 (\sqrt{b})^2 = ab$$

(szorzat hatványozása, valamint négyzetgyök def.-ja alapján)

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

Biz:

a $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ nem negatív

Azt kell bizonyítani, hogy a négyzete egyenlő $\frac{a}{b}$ -vel.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

(hányados hatványozása)

$$\sqrt{a^k} = (\sqrt{a})^k, \quad a \geq 0, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (ha } k \in (\mathbb{Z}^- \cup \{0\}), \text{ akkor } a \neq 0)$$

Biz:

a) $k \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt{a^k} = \sqrt{a \cdot a \cdot \dots \cdot a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \dots \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^k$$

b) $k = 0, a \neq 0$

$$\sqrt{a^0} = \sqrt{1} = 1 = (\sqrt{a})^0$$

c) $k \in \mathbb{Z}^-, k = -l, l \in \mathbb{Z}^+$

$$\sqrt{a^k} = \sqrt{a^{-l}} = \frac{1}{\sqrt{a^l}} = \frac{1}{(\sqrt{a})^l} = (\sqrt{a})^{-l} = (\sqrt{a})^k$$

- *n*-edik gyök azonosságai:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

Biz:

vegyük mindkét oldal *n*-edik hatványát!

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$$

(definíció)

$$\left(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$$

(szorzat hatványozása valamint definíció)

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

Biz:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

(hányados hatványozása)

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Biz:

vegyük mindkét oldal *n*-edik hatványát

$$\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^k = a^k$$

(hatvány hatványozása)

$$\left(\sqrt[n]{a^k}\right)^n = a^k$$

(definíció)

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}, \quad a \geq 0$$

Biz:

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right]^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$$

TÉTEL:

Ha $a \in \mathbb{Z}^+$ és a nem négyzetszám, akkor \sqrt{a} irracionális.

Biz:

indirekt módon

$$\text{Tfh. } \sqrt{a} = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}^+$$

$$a = \frac{p^2}{q^2}$$

$$aq^2 = p^2$$

Mivel az a nem négyzetszám, ezért a prímtényezős felbontásában biztosan van olyan prímtényező, amelyiknek a kitevője páratlan, és mivel az a -t egy négyzetszámmal szorozzuk, ezért ennek a prímtényezőnek a kitevője a bal oldalon páratlan lesz. A jobb oldalon viszont a prímtényezős felbontásban minden prímtényező kitevője páros, így a két oldal nem lehet egyenlő.

Tehát ellentmondásra jutottunk, így a \sqrt{a} irracionális.

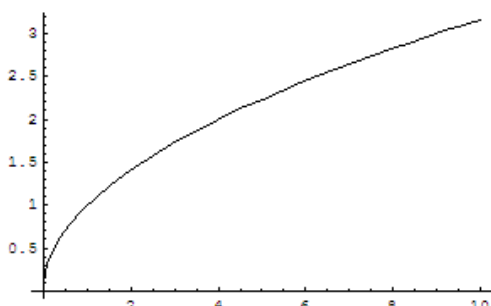
Gyökfüggvények:

Def: $f: H \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$

$$H = \mathbb{R}, \text{ ha } n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$$

$$H = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \text{ ha } n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$\text{--- } D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$$

$$\text{--- } R_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$$

--- zérushely: $x = 0$

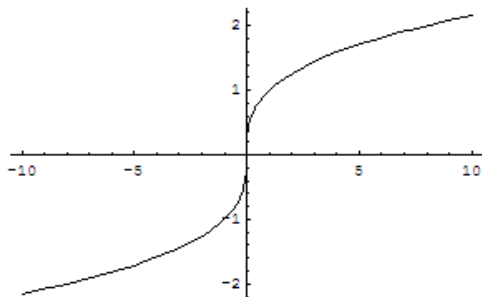
--- max.: nincs

--- min.: $x = 0$

--- az értelmezési tartományán szigorúan nő

--- konkáv

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$



- alulról korlátos, felülről nem
- se nem páros, se nem páratlan

- $\mathbb{R}_g = \mathbb{R}$
- zérushely: $x = 0$
- szig. mon. növekvő
- nem korlátos
- páratlan \rightarrow origóra szimmetrikus
- $] -\infty; 0[$ -on konvex, $[0; \infty[$ -on konkáv
- folytonos
- Ugyanezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik az összes páratlan gyökfüggvény.

Inverz függvény:

f és g egymás inverzei, ha $D_f = R_g$ és $R_f = D_g$, továbbá ha minden $x \in D_f$ esetén $g[f(x)] = x$.

$$f : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-); f(x) = \sqrt[2k]{x}$$

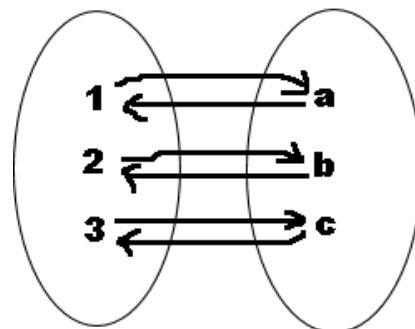
$$f^{-1} : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-); E$$

$$f^{-1} \circ f : (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-); (f^{-1} \circ f)(x) = (\sqrt[2k]{x})^{2k} = x$$

$y = x$ -re szimmetrikus

$$g : \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}; g(x) = \sqrt[2k+1]{x}$$

$$g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}; g^{-1}(x) = x^{2k+1}, k \in \mathbb{Z}^+$$



Alkalmazások:

szórás, statisztika, közepek, hatványközepek, kamatos kamat, inga lengésideje, gyökös egyenletek megoldása