3. Hatványozás, hatványfüggvények

Definíciók:

- Ha a kitevő nagyobb, mint 1, akkor a szám n-edik hatványa olyan n tényezős szorzat, amelynek minden tényezője maga a szám.
  $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n db) $\quad n \in (N^+ \setminus \{1\})$
- Bármely szám első hatványa maga a szám.
  $a^1 = a$
- Bármely 0-tól különböző szám 0. hatványa 1.(permanencia-elv)
- Egy 0-tól különböző valós szám negatív egész kitevőjű hatványa egyenlő a szám ellentett kitevőjű hatványának reciprokával.
  $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \in Z^+$, $a \neq 0$
- Az $a^{\frac{p}{q}}$ jelenti azt a számot, amelynek q-adik hatványa a^p. (q poz. egész, p egész)
  $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
- Irracionális kitevőjű hatvány
  szemléletesen
  $\sqrt{2} = ?$ $\quad 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
  $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$
  $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$
  $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$
  A permanencia-elv érvényesül, megmaradnak a hatványozás azonosságai.

TÉTELEK:

- Hatványozás azonosságai pozitív egész kitevőkre:.
  - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (m, n \in \mathbb{Z}^+), a \in R$, $\underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{mdb} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{ndb}}_{m+ndb} = a^{m+n}$
  - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n, a \neq 0 \quad \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}^{mdb}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{ndb}} = a^{m-n}$, ha $m < n \Rightarrow \dfrac{1}{a^{n-m}}$
  - $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$
    $\left(a^m\right)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{ndb} = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{mdb} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{mdb} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{mdb}}_{ndb} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \cdot ndb} = a^{m \cdot n}$
  - $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
    $(a \cdot b)^n = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b) = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{ndb} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{ndb} = a^n \cdot b^n$

o $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$,b $\neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{ndb} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{ndb}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{ndb}} = \frac{a^n}{b^n}$$

•Permanencia elv:

$a^0 = 1, m \in \mathbb{N}, n = 0$

pl.: $a^{m+0} = a^m$ úgy terjesztjük ki a definíciót bővebb számkörre, hogy

$a^m \cdot a^n = a^m \cdot \underbrace{a^0}_{1} = a^m$

érvényesek maradjanak a hatvány azonosságok

•Racionális kitevő esetén:

Ha $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{s}}$, negatív alap esetén nem értelmezzük!

Permanencia-elv:

$a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}$

$a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q\cdot s]{a^{p\cdot s}\cdot a^{r\cdot q}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$

Hatványfüggvények:

Def.: $f: H \to R, f(x) = x^{\alpha}$, α∈R és $H \subseteq R$.

Spec. esetek: $\alpha \in N^+$ $f: R \to R, f(x) = x^n$, n∈N^+

$\alpha = -1$ $g: R/\{0\} \to R, g(x) = \frac{1}{x}$

$n = 1 \Rightarrow$ lineáris fgv.

$n = 2 \Rightarrow$ másodfokú fgv.

$f: R \to R, f(x) = x^2$

- Zérushelye: x=0.
- Max. hely: nincs.
- Min. hely: x=0.
- Monotonitás: a $]-\infty;0]$-on szig. mon. csökkenő, a $[0;\infty[$-on szig. mon. növekvő.
- Páros fgv.$\Rightarrow$y tengelyre szimmetrikus.
- Konvex.

Zérushely: Az értelmezési tartomány azon részeit nevezzük zérushelynek, ahol a függvény 0-t vesz fel.

Szélsőérték: Az függvénynek az értelmezési tartománya x_0 helyén maximuma (minimuma) van, ha az ott felvett függvényértéknél nagyobbat (kisebbet) sehol nem vesz fel.

Monotonitás: Az f függvénynek az értelmezési tartománya [a;b]-án szigorúan monoton növekvő (csökkenő), ha bármely $x_1; x_2 \in [a;b], x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

<u>Definíció:</u> $f : H \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$
Ha minden $x \in H$ esetén $-x \in H$ és $f(-x) = f(x)$ $\left(f(-x) = -f(x)\right)$, akkor az f függvényt párosnak (páratlannak) nevezzük.
A páros függvény grafikonja szimmetrikus az y tengelyre, a páratlané az origóra.
<u>Definíció:</u> Legyen az f függvény differenciálható [a;b]-n. Ha az f függvény grafikonjának bármely pontjába húzott érintő a függvény grafikonja felett (alatt) van, akkor az f függvény az adott intervallumon konkáv (konvex).

n=2k $\Rightarrow$ páros, y tengelyre szimmetrikus.
n=2k + 1 $\Rightarrow$ páratlan, origóra szimmetrikus

harmadfokú függvény:
$f : R \to R, f(x) = x^3$

- Zérushely: x=0.
- Szélsőérték: nincs.
- Monotonitás: $\left]-\infty; 0\right[$ -on szigorúan monoton nő
- Páratlan függvény $\Rightarrow$ origóra szimmetrikus
- Ha $x \in \left]-\infty; 0\right[$, akkor konkáv. Ha $x \in \left]0; \infty\right[$, akkor konvex. x=0 inflexiós pont.

$n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}^+$; páratlan, origóra szimmetrikus.

Alkalmazások:

- $F(x) = D \cdot x$ rugóerő
- $E_{rug} = \frac{1}{2} D x^2$
- $F_c = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$
- radioaktív bomlás
- kamatszámítás
- nevezetes azonosságok
- mértani sorozatok.